

COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO-LINEAR E INSTABILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO AXIAL PERIÓDICO

Z. J. G. N. del Prado

P. B. Gonçalves.

Pontifícia Universidade Católica – PUC - Rio, Departamento de Engenharia Civil.
22453-900 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil, E-mail: paulo@civ.puc-rio.br

Resumo. *No presente trabalho utiliza-se um modelo simplificado que retém os termos não-lineares essenciais para o estudo das oscilações não-lineares e da instabilidade de cascas cilíndricas sob cargas axiais periódicas. Para isto são usadas as equações de Donnell para cascas abatidas, modificadas com a força transversal de inércia e as forças de amortecimento, junto com o método de Ritz para derivar um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de movimento que são resolvidas através do método de Runge-Kutta. Para estudar o comportamento não-linear da casca, várias estratégias numéricas foram utilizadas a fim de se obter os mapas de Poincaré, pontos fixos estáveis e instáveis, diagramas de bifurcação e bacias de atração. É dada especial atenção à determinação dos limites de estabilidade no espaço de controle e à identificação do fenômeno de bifurcação associado com estes limites. Isto pode ajudar a esclarecer com comportamento dinâmico não-linear de cascas cilíndricas sob cargas axiais periódicas, um tópico praticamente inexplorado na literatura.*

Palavras chave: *Instabilidade, Dinâmica não-linear, Vibrações não-lineares, Cascas cilíndricas*

1. INTRODUÇÃO.

Cilindros de paredes finas e submetidos a carregamento axial e lateral são estruturas amplamente utilizadas na Engenharia Civil, Mecânica, Aeronáutica, Nuclear, etc. Estas estruturas combinam uma forma geométrica simples com um complexo comportamento quando submetidas a excitações externas.

A interação modal em cascas cilíndricas sob cargas estáticas é um problema que tem sido estudado por muitos pesquisadores desde a década de 60. Yamaki publicou em 1984 um tratado sobre a estabilidade elástica de cascas cilíndricas comparando onde são apresentados resultados teóricos e experimentais sobre o comportamento pré e pós-flambagem de cascas cilíndricas sob cargas simples ou combinadas, considerando diferentes condições de contorno. Estes resultados mostram que cascas cilíndricas apresentam geralmente um comportamento pós-crítico instável com razoável sensibilidade a imperfeições. Mostra-se também que a

resposta é altamente dependente da forma da solução modal. Hunt *et al* (1986) realizaram um estudo detalhado sobre a interação modal em cascas cilíndricas, identificando os modos essenciais para a descrição correta do comportamento pós-crítico inicial e a interação entre estes modos e observando a quebra de simetria gerada por este acoplamento, principais motivos da alta sensibilidade a imperfeições destas estruturas. Os modos essenciais para a descrição do comportamento pós-crítico inicial foram também estudados por, dentre outros, Antonini (1990) e Santee (1988).

O conceito de simetria e o de quebra de simetria esta relacionado diretamente com o estudo de perda de estabilidade e de interação modal. Sistemas estruturais perfeitos apresentam certas características de simetria, havendo uma tendência para estes sistemas reterem sua simetria ao longo do caminho fundamental de equilíbrio. A simetria do sistema físico leva a uma simetria dos modos clássicos de bifurcação, no sentido que amplitudes iguais e opostas geram uma mesma configuração deformada pelo que exibem o mesmo valor de energia potencial total. Os modos de flambagem harmônicos de cascas cilíndricas são simétricos mas, quando combinados, apresentam considerável assimetria e as deformações internas são totalmente diferentes das deformações externas, como é observado no modelo de Yoshimura (Hunt *et al.*, 1979). Os modos mais importantes são o modo puramente circunferencial e o modo puramente axial, ambos com o dobro do número de ondas do modo crítico (Hunt *et al*, 1986, Santee, 1988 e Antonini, 1990).

Nayfeh *et al* (1989) estudaram a interação modal em sistema dinâmicos analisando as ressonâncias internas um-a-um, dois-a-um e três-a-um; concluíram que a ressonância interna conduz a interações modais que são responsáveis por vários fenômenos importantes. Recentemente, Popov *et al* (1997) estudaram as bifurcações e a instabilidade das soluções de cascas cilíndricas excitadas parametricamente (carga axial periódica), visando observar o comportamento dinâmico não-linear e sua importância no comportamento da estrutura. Eles concluem que, como o espectro de frequências de uma casca cilíndrica não segue uma regra simples e geralmente várias frequências sucessivas estão muito próximas, esta alta densidade de frequências facilita a interação modal. Este estudo mostra também que uma modelagem simples, que retém os modos mais importantes no que se refere ao acoplamento modal, torna possível a obtenção de diagramas de bifurcação precisos sem grandes dispêndios computacionais e que os resultados obtidos estão em concordância com os resultados experimentais. Isto é, com uma escolha adequada de modos para descrever o campo de deslocamentos transversais, a casca cilíndrica apresenta, mesmo considerando um pequeno número de modos, um comportamento do tipo “softening”, característico dos experimentos.

No presente trabalho utiliza-se um modelo simplificado que retém os termos não-lineares essenciais para estudar as oscilações não-lineares e a instabilidade paramétrica de cascas cilíndricas sob cargas axiais periódicas. Para isto são usadas as equações de Donnell para cascas abatidas (Brush e Almroth, 1975; Yamaki, 1984), modificadas com a força transversal de inércia, junto com o método de Ritz para derivar um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de movimento que são resolvidas através do método de Runge-Kutta. Para estudar o comportamento não-linear da casca, várias estratégias numéricas foram implementadas a fim de obter os mapas de Poincaré, pontos fixos estáveis e instáveis, diagramas de bifurcação e bacias de atração. É dada especial atenção à determinação dos limites de estabilidade no espaço de controle e à identificação do fenômeno de bifurcação associado com estes limites. Cabe ressaltar que os estudos anteriores sobre instabilidade paramétrica de cascas cilíndricas estão restritos ao uso de soluções lineares (problema de Mathieu) ou soluções fracamente não-lineares, o que não permite descrever o comportamento dinâmico não-linear no interior das regiões de instabilidade paramétrica e, em particular, movimentos complexos como as oscilações sub-harmônicas e caóticas exibidas pela casca nestas regiões.

2. Formulação Matemática

Considera-se uma casca cilíndrica circular, infinitamente longa, de raio R , espessura h , módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν , livre de imperfeições e submetida a um carregamento axial periódico uniformemente distribuído atuando nas extremidades da casca como visto na Fig. (1). Para a descrição da geometria do cilindro tem-se que x é a coordenada longitudinal, y é a coordenada circunferencial e z é a coordenada normal à superfície de referência, como visto na Fig. (1). O carregamento periódico é da forma:

$$p(t) = p_0 + p_1 \cos(\omega t) \quad (1)$$

onde p_0 é a parcela estática e $p_1 \cos(\omega t)$, a parcela dinâmica.

A análise da casca será feita visando as deformações axiais periódicas de comprimento L . A casca é modelada supondo que suas extremidades estão livres de maneira que sua seção circular continua circular e concêntrica com sua configuração inicial.

As hipóteses utilizadas na formulação são: (a) o material é considerado homogêneo e isotrópico, (b) consideram-se as hipóteses de Kirchhoff, (c) as deformações específicas são sempre pequenas, (d) considera-se o estado de tensões aproximadamente plano e paralelo à superfície média, (e) a inércia no plano é desprezada e, conseqüentemente, só serão considerados movimentos harmônicos transversais de flexão, (f) são ignoradas as não-linearidades nas deformações por curvatura, embora sejam consideradas as não linearidades na deformação no plano médio, (g) $h \ll R$ (casca fina) e (g) a aproximação de Donnell são tomadas como válidas, sendo: $a/R \ll \pi/5$ onde a é o comprimento médio de uma onda na direção circunferencial.

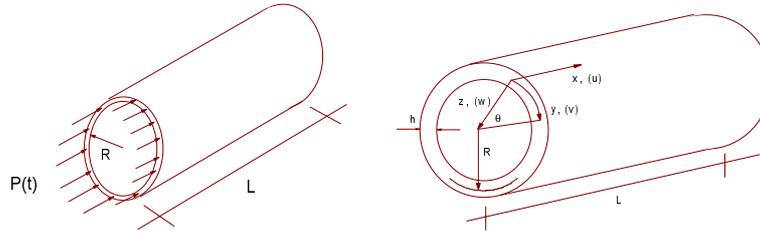


Figura 1 - Casca cilíndrica com carregamento axial

As equações de equilíbrio e de compatibilidade que governam o comportamento da casca cilíndrica, segundo a teoria de cascas abatidas de Donnell, são:

$$m \ddot{w} + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \Delta \dot{w} + D \Delta^2 w = f_{,yy} w_{,xx} + f_{,xx} (w_{,yy} + 1/R) - 2 f_{,xy} w_{,xy} \quad (2)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 f = -\frac{1}{R} w_{,xx} - w_{,xx} w_{,yy} + w_{,xy}^2$$

onde Δ^2 é o operador biarmônico, w , o deslocamento transversal, f , a função de Airy, $() = \partial() / \partial t$, $()_{,s} = \partial() / \partial s$, β_1 e β_2 , coeficientes de amortecimento, D , a rigidez a flexão e m , a massa por unidade de área.

A rigidez de membrana e a rigidez de flexão da casca são dadas respectivamente por:

$$K = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

2.1 Energia do sistema

A energia interna de deformação elástica é a soma das energias de membrana (U_m) e flexão (U_b). Estas parcelas de energia são descritas como funções quadráticas das deformações específicas e das mudanças de curvatura, respectivamente, medidas com referência à superfície média da casca indeformada.

A energia de membrana em termos da função de tensões é:

$$U_m = \frac{I}{2Eh} \iint (\Delta f)^2 - 2(I + \nu) (f_{,xx} f_{,yy} - f_{,xy}^2) dx dy \quad (3)$$

Já a energia de flexão em termos do deslocamento w é:

$$U_b = \frac{D}{2} \iint [(\Delta w)^2 - 2(I - \nu) (w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2)] dx dy \quad (4)$$

O trabalho da carga axial aplicada à casca cilíndrica é dado por:

$$\Omega_a = -\frac{p(t)}{2} \iint \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (5)$$

A energia cinética é dada por:

$$T = \iint \frac{m}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (6)$$

Considera-se a dissipação de energia no meio e no material. Sendo assim, adotou-se um amortecimento linear viscoso do meio (β_1) e um amortecimento visco-elástico do material (β_2), logo o trabalho das forças de dissipação é escrito como:

$$R_e = \frac{1}{2} \beta_1 \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \beta_2 \iint \left(\Delta \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (7)$$

Para se resolver é necessária a adoção de uma função aproximadora para os deslocamentos laterais que permita descrever o sistema contínuo como um sistema discreto. Neste caso adotou-se uma função aproximadora para w com dois graus de liberdade, da forma:

$$w(x, y) = \xi_1 h \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \xi_2 h \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (8)$$

sendo n é o número de ondas na direção circunferencial do cilindro.

Substituindo a expressão (8) na equação de compatibilidade (2), obtém-se uma equação diferencial parcial linear em f , que, após resolvida, fornece a expressão da função de tensão, $f(x, y)$, compatível com a aproximação escolhida para w e que atende as devidas condições de contorno e continuidade.

A energia potencial total é igual a

$$V = U_m + U_b - \Omega_a \quad (9)$$

Substituindo as aproximações para w e f em (9), resulta em:

$$V = \frac{1}{2} V_{11} \xi_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \xi_2^2 + \frac{1}{2} V_{112} \xi_1^2 \xi_2 + \frac{1}{24} V_{1111} \xi_1^4 + \frac{1}{4} V_{1122} \xi_1^2 \xi_2^2 \quad (10)$$

Os coeficientes da energia são dados por:

$$V_{11} = \left[\frac{8 \alpha^2}{\pi^2 (1 + \gamma^2)^2} + \frac{2 \pi^2 \beta^4 (1 + \gamma^2)^2}{3 (1 - \nu^2)} \right] V_C, \quad V_{22} = \left[\frac{16 \alpha^2}{\pi^2} + \frac{64 \pi^2 \beta^4}{3 (1 - \nu^2)} \right] V_C$$

$$V_{112} = \left[-\frac{32 \alpha \beta^2 \gamma^2}{(1 + \gamma^2)^2} - 4 \alpha \beta^2 \gamma^2 \right] V_c, \quad V_{1111} = [3 \pi^2 \beta^4 (1 + \gamma^4)] V_c$$

$$V_{1122} = \left\{ 64 \pi^2 \beta^4 \gamma^4 \left[\frac{1}{(1 + \gamma^2)^2} + \frac{1}{(9 + \gamma^2)^2} \right] \right\} V_c$$

onde as grandezas adimensionais α , β e γ e o fator V_c são dados por:

$$\alpha = h/R, \quad \beta = h/L, \quad \gamma = Ln/\pi R, \quad V_c = \pi^3 E h R L / 16$$

Substituindo a função w em (6), obtém-se para a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} T_{11} \xi_1^2 + \frac{1}{2} T_{22} \xi_2^2 \quad (10)$$

onde $T_{11} = \frac{1}{2} \pi m h^2 R L$ e $T_{22} = \pi m h^2 R L$.

Igualmente, substituindo w na expressão das forças dissipativas (7), tem-se:

$$R_e = \frac{1}{2} R_{11} \xi_1^2 + \frac{1}{2} R_{22} \xi_2^2 \quad (11)$$

sendo: $R_{11} = \frac{1}{2} \pi \beta_1 h^2 R L + \frac{1}{2} \pi^5 \beta_2 \frac{\beta^3}{\alpha} (1 + \gamma^2)^2$ e $R_{22} = \pi \beta_1 h^2 R L + 16 \pi^5 \beta_2 \frac{\beta^3}{\alpha}$

O trabalho das forças externas é escrito como:

$$\Omega_a = \frac{1}{2} W_{11} \xi_1^2 + \frac{1}{2} W_{22} \xi_2^2 \quad (12)$$

onde $W_{11} = \frac{1}{2} p(t) \frac{\pi^3 h^2 R}{L}$ e $W_{22} = 4 p(t) \frac{\pi^3 h^2 R}{L}$

2.2 Equações de movimento

A partir da função de Lagrange e usando o princípio de Hamilton, chega-se às duas equações não-lineares acopladas de movimento da casca cilíndrica:

$$T_{11} \ddot{\xi}_1 + R_{11} \dot{\xi}_1 + (V_{11} - W_{11}) \xi_1 + V_{112} \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{6} V_{1111} \xi_1^3 + \frac{1}{2} V_{1122} \xi_1 \xi_2^2 = 0$$

$$T_{22} \ddot{\xi}_2 + R_{22} \dot{\xi}_2 + (V_{22} - W_{22}) \xi_2 + \frac{1}{2} V_{112} \xi_1^2 + \frac{1}{2} V_{1122} \xi_1^2 \xi_2 = 0 \quad (13)$$

3. MÉTODOS NUMÉRICOS

Para a análise do comportamento dinâmico da casca foi necessário implementar e desenvolver métodos numéricos para sistemas dinâmicos com mais de um grau de liberdade. Cabe ressaltar que a maioria dos trabalhos encontrados em dinâmica não-linear e os programas computacionais disponíveis estão restritos a sistemas com um grau de liberdade. Neste trabalho, foram desenvolvidas rotinas gráficas e numéricas para cálculo de diagramas de bifurcação, expoentes de Lyapunov e bacias de atração.

Utilizou-se duas estratégias numéricas para o cálculo dos diagramas de bifurcação: o método da força bruta (para mais detalhes ver Nayfeh e Balachandran, 1995) e o método de continuação (para mais detalhes ver Allgower e George, 1990)

Igualmente, calculou-se os expoentes de Lyapunov associados a uma determinada trajetória, os expoentes são uma medida da taxa de expansão ou contração do espaço na vizinhança da trajetória e medem a sensibilidade às condições iniciais ou perturbações. Uma trajetória será insensível a perturbações se os expoentes de Lyapunov são todos negativos.

Para a determinação das bacias de atração utilizou-se uma variação do mapeamento de células, inicialmente proposto por Hsu (1980), chamado PLICM (Poincaré Linear Interpolated Cell Mapping). Este método está baseado na idéia de introduzir seções de Poincaré em um espaço de estado multidimensional de um sistema dinâmico e combiná-lo com um procedimento de interpolação dentro das células o que constitui uma discretização do domínio de interesse. Tendo um sistema dinâmico de ordem M , escolhe-se uma seção de Poincaré (na posição $x_i = \xi_i$) de dimensão $M-1$ no espaço de estado. Dentro da seção de Poincaré escolhida, são definidas duas regiões D_G e D_I , a primeira é utilizada para se obter um espaço deformado através de uma primeira integração do sistema, e a segunda é a região de interesse onde é desejado conhecer o comportamento do sistema (projeção da bacia de atração na seção $x_i = \xi_i$). O método consta de três partes: integração para se obter um domínio deformado através de um mapeamento, interpolação e construção do mapeamento celular e “Unravelling” das células periódicas. Para mais detalhes ver Levitas *et al* (1995, 1997).

4. APLICAÇÃO NUMÉRICA

Considere uma casca cilíndrica esbelta de aço com as seguintes propriedades físicas e geométricas: $h = 0,002$ m, $R = 0,2$ m, $L = 0,4$ m, $E = 2,1 \times 10^8$ kN/m², $\nu = 0,3$ e $m = 78,5$ kg/m². O coeficiente de amortecimento viscoso é $\beta_1 = 1,6\%$ do amortecimento crítico do sistema linear e o amortecimento do material é igual a $\beta_2 = \eta D$ com $\eta = 0,0001$.

No modelo, as duas equações de equilíbrio estático que governam o comportamento da casca são equações não lineares acopladas. Estas equações foram resolvidas utilizando-se o método de Newton - Raphson; com o qual gerou-se o caminho pós-crítico mostrado na Fig. (2). Verifica-se que este caminho pós-crítico é inicialmente instável, sendo este fato responsável pela sensibilidade a imperfeições deste tipo de estrutura. Este caminho atinge um mínimo pós-crítico associado a grandes deflexões laterais, a partir do qual a casca passa a apresentar um comportamento pós-crítico estável. Tem-se, portanto, que a casca perde a estabilidade no ponto de bifurcação, exibindo um salto dinâmico até atingir, um estado pós-crítico estável relativo ao mesmo nível de carregamento. Na Fig. (2) também é mostrada a variação da frequência natural mínima da casca com o parâmetro de carga, ao longo do caminho fundamental e do caminho pós-crítico. Pode-se observar claramente a variação das frequências para cada estágio: No fundamental as frequências são positivas mas vão diminuindo a medida que a carga vai crescendo até se tornar nula no ponto correspondente a $P = P_{CR}$, num segundo estágio essas frequências adotam valores negativos indicando um caminho pós-crítico inicial instável e, finalmente, no terceiro estágio, as frequências são novamente positivas indicando um incremento de rigidez da casca.

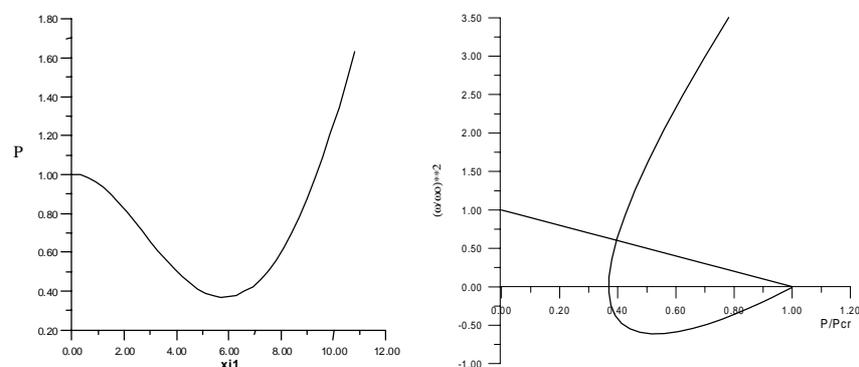


Figura 2 - Caminho pós - crítico da casca cilíndrica e variação das frequências naturais.

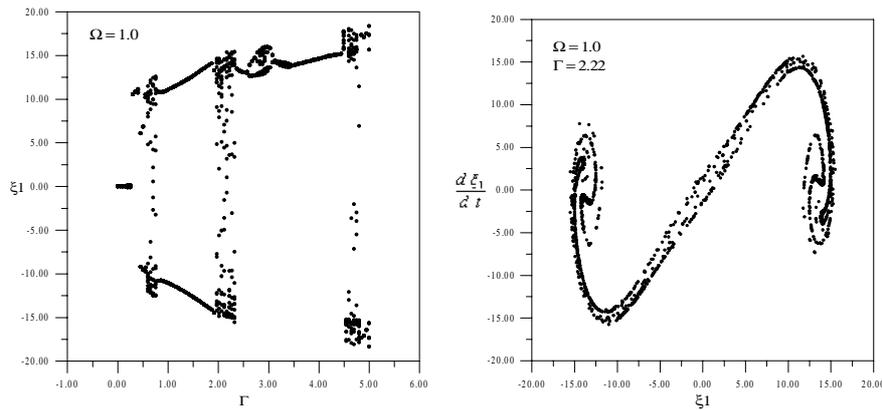


Figura 3 – Diagrama de bifurcação e seção de Poincaré da região caótica do diagrama.

Nas figuras a seguir Ω é a frequência da força excitadora e Γ é o parâmetro de carga. Na Fig. (3) é mostrado o diagrama de bifurcação obtido através do método da força bruta. Inicialmente, para pequenos valores de Γ , tem-se que a posição fundamental é estável, sendo o deslocamento transversal nulo. Após um certo valor crítico, passa-se a observar a existência de soluções periódicas de várias ordens e soluções caóticas. O método da força bruta tem a vantagem de detectar soluções estáveis de qualquer ordem, inclusive soluções caóticas. Entretanto é incapaz de seguir ramos instáveis e mais de uma solução, para isto precisa-se utilizar o método da continuação. Na Fig. (3) mostra-se também a seção de Poincaré para uma das regiões caóticas do diagrama de bifurcação.

Na Fig. (4) observam-se os diagramas de bifurcação calculados através do método da continuação, tendo como parâmetro de controle Γ e $\Omega = 1.0$. Estes diagramas permitem observar particularidades não observadas na Fig. (3). Verifica-se que há duas bifurcações ao longo do caminho fundamental (solução trivial); gerando soluções de período 1 e 2. As soluções não-triviais exibem ramos estáveis e instáveis. Na Fig. (5) são vistos os diagramas de bifurcação na região de ressonância paramétrica principal ($\Omega = 2.0$). Nas figuras (4) e (5), 1T e 2T indicam soluções de período um e soluções de período 2, respectivamente.

Na Fig. (6) apresenta-se os expoentes Lyapunov de um ponto estável obtido do diagrama de bifurcação, como pode ser visto, os expoentes mostram-se coerentes com o diagrama de bifurcação.

Na Fig. (7) são vistas duas projeções das bacias de atração calculadas utilizando o método PLICM. A primeira bacia refere-se a uma casca com carregamento estático de 0,80. Foi pesquisada a seguinte região do espaço fase $x_1 = [-12,0 \dots 12,0]$, $x_2 = [-10,0 \dots 10,0]$, $x_3 = [-10,0 \dots 10,0]$ e $x_4 = 0,0$, sendo a bacia projetada no plano referente a $x_3 = 5,88$. A segunda foi obtida considerando o carregamento dinâmico de $0.808 + 1.2 \cos(t)$, sendo analisada a região $x_1 = [-20,0 \dots 20,0]$, $x_2 = [-15,0 \dots 15,0]$, $x_3 = [-15,0 \dots 15,0]$, $x_4 = 0,0$. A bacia foi projetada no plano com $x_3 = 6,75$.

5. CONCLUSÕES

A adoção do modelo simplificado da casca cilíndrica permite avaliar o comportamento da estrutura de forma adequada mostrando o efeito do acoplamento modal na resposta estática e dinâmica do cilindro. As ferramentas numéricas utilizadas mostraram-se eficazes para o estudo de sistemas não-lineares com mais de um grau de liberdade. Os resultados mostram que a casca cilíndrica apresenta um comportamento dinâmico complexo, em virtude da grande não-linearidade gerada pelo acoplamento modal. Os diagramas de bifurcação e bacias de

atração mostram a existência de soluções estáveis e instáveis de várias ordens, incluindo a existência de soluções caóticas de grande amplitude.

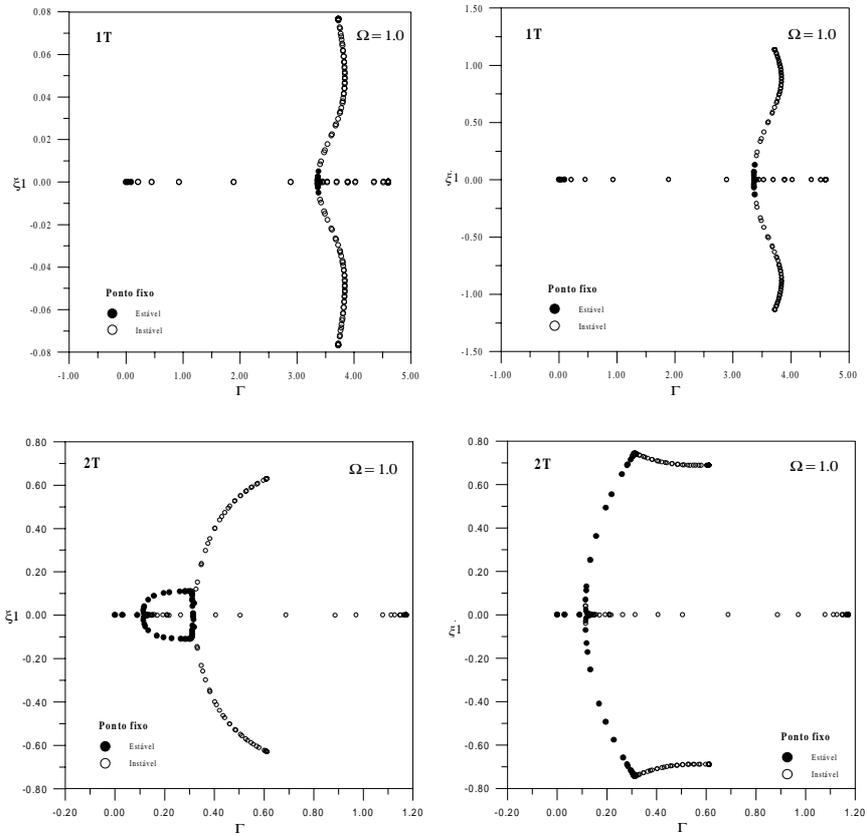
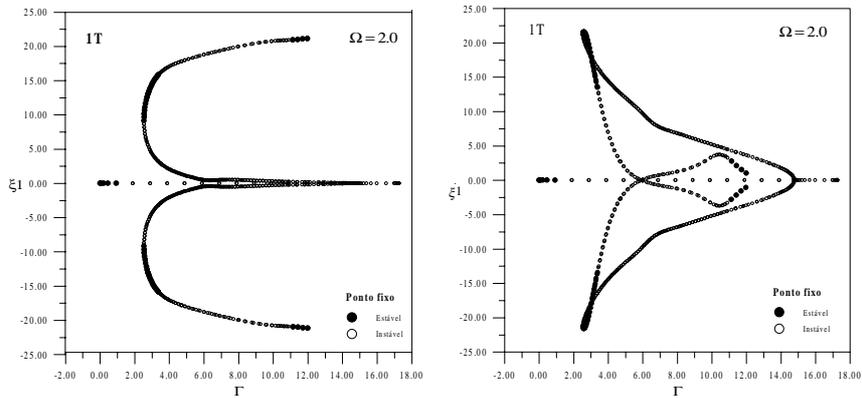


Figura 4 – Diagramas de bifurcação para $\Omega = 1.0$.



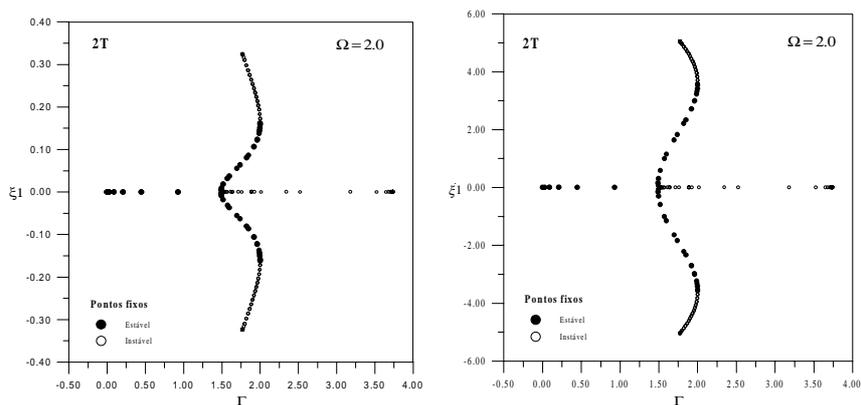


Figura 5 – Diagramas de bifurcação para $\Omega = 2.0$.

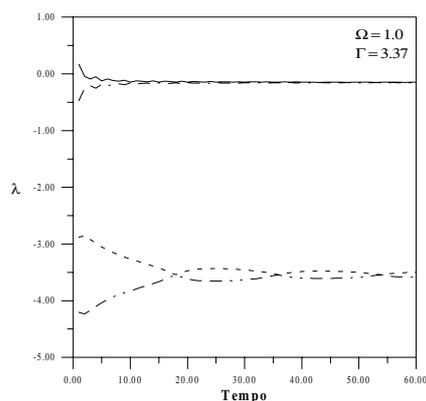


Figura 6 – Expoentes de Lyapunov para o estado com $\Gamma = 3,37$.

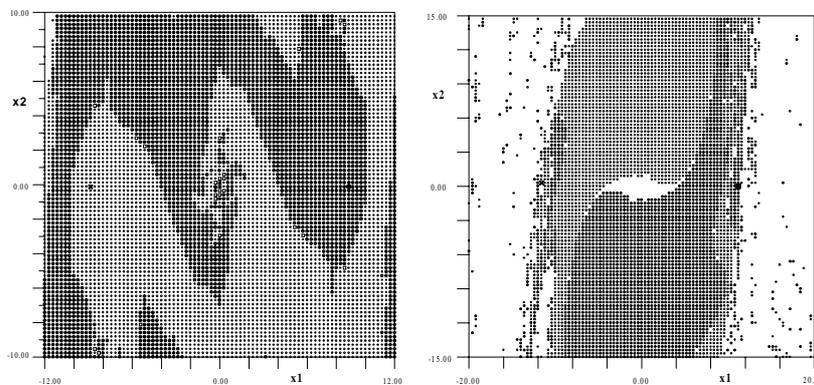


Figura 7 – Bacia de atração sem carga dinâmica e com carga dinâmica.

REFERÊNCIAS

- Allgower, E. e Georg, K., 1990, Numerical Continuation Methods. An Introduction, Springer – Verlag, Berlin.
- Antonini, R. C., 1981, Influência da Interação entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas, Diss. de Mestrado, COPPE, Rio de Janeiro.
- Brush, D. O. e Almroth, B. O., 1975, Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw Hill, New York.
- Hsu, C. S., 1980, A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems, Journal of Applied Mechanics, vol. 47, pp. 931 – 939.
- Hunt, G. W., Reay, N. A. e Yoshimura, T., 1979, Local diffeomorphisms in the manifestations of the umbilic catastrophes, Proc. Royal Soc., London, A369, pp. 47 – 65.

- Hunt, G. W., Williams, K. A. J. e Cowell, R. G., 1986, Hidden symmetry concepts in the elastic buckling of axially loaded cylinders, *International Journal of Solid and Structures*, vol. 22, n. 12, pp. 1501 – 1515.
- Levitas, J., Singer, J. e Weller, T., 1997, Global dynamic stability of a shallow arch by Poincaré-like simple cell mapping, *International J. Non-Linear Mech.*, 2, pp. 411 – 424.
- Levitas, J. and Weller, T., 1995, Poincaré linear interpolated cell mapping: method for global analysis of oscillating systems, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 62, pp. 489 – 495.
- Nayfeh, A. H. and Balachandran, B. 1989, Modal interactions in dynamical and structural systems, *Applied Mechanics Review*, vol. 42, no. 11, part 11.
- Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., 1995, *Applied Nonlinear Dynamics. Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons Inc, New York.
- Popov, A. A. e Thompson, J. M. T., 1997, Low dimensional models of shells vibrations. parametrically excited vibrations of cylindrical shells, *Sub.to J. of Sound and Vibration*.
- Santee, D.M., 1988, Estudo do acoplamento modal, da quebra de simetria e das distribuições de energia na perda de estabilidade de cascas cilíndricas sob a ação de cargas combinadas, Dissertação de Mestrado, DEC, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Yamaki, N., 1984, *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, Elsevier Science Publishers B. V., Netherlands.

Non-linear Dynamic Behavior and Instabilities of Cylindrical Shells Under Axial Periodic Loads.

ABSTRACT

Due to its complex non-linear behavior, the dynamics of cylindrical shells are not completely understood and a wealth of new non-linear phenomena are still coming to light. The complex dynamics of cylindrical shells under compressive forces is mainly due to the presence of quadratic non-linearities emerging from strong modal coupling. In the present paper a low dimensional model which retains the essential non-linear terms is used to study the nonlinear oscillations and instabilities of the shell. For this, the Donnell shallow shell equations, modified with the transverse inertia force, are used together with the Galerkin method to derive a set of coupled ordinary differential equations of motion which are, in turn, solved by the Runge-Kutta method. In order to study the non-linear behavior of the shell, several numerical strategies were used to obtain Poincaré maps, stable and unstable fixed points, bifurcation diagrams and basins of attraction. Special attention is given to the determination of the stability boundaries. The results obtained through this numerical investigation clarify the conditions which control whether or not escape from the pre-buckling potential well takes place. This may help in establishing proper design criteria for these shells under dynamic loads, a topic practically unexplored in literature.

Keywords: Shells, Dynamic buckling, Modal interaction, Parametric Resonance.